Analyse 2

Mohamed El Omari
Enseignant Chercheur,
Spécialité: Statistique et Probabilités

Ancien Inspecteur Pédagogique

Faculté Polydisciplinaire de Sidi Bennour.

March 21, 2023

Outline

1 **Intégration au sens de Riemann et calcul des primitives**
- Subdivisions et fonctions en escalier
- Intégrale d'une fonction en escalier
- Propriétés de l'intégrale
- Travaux dirigés-TD1
- Intégrale au sens de Riemann
- Travaux dirigés-TD2
- Calcul des primitives
- Techniques de calcul des intégrales

L'objectif principal de ce chapitre est :

- d'introduire les notions de base du Calcul Intégral (subdivision, fonction en escalier, intégrabilité au sens de Riemann, calcul des primitives, intégration par parties, changement de variables, etc ...);
- interpréter les intégrales positives (calcul des aires);
- utiliser les intégrales pour déterminer la valeur d'une série (somme infinie).

Comment déterminer l'aire d'une figure plane ?

Subdivisions et fonctions en escalier

Definition 1.

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(-\infty < a < b < +\infty)$.

On appelle une **subdivision** d'ordre n de $[a, b]$ une suite finie, strictement croissante, de nombres $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$. Autrement dit $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

Le réel $\delta(\sigma) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$ est **le pas** de la subdivision σ.

La subdivision σ dite **régulière** (ou à pas constant) si

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = \delta(\sigma), \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n.$$

Remarque.

La subdivision σ **n'est pas unique**.

À partir de deux subdivisions μ et σ on peut construire une autre subdivision qu'on note $\mu \vee \sigma$.

Soit $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$.

a) Préciser la valeur de x_1, x_2 et x_3 en fonction de a et b.

b) Exprimer x_i en fonction de a et b, pour tout $i \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$.

Definition 2.

Une fonction φ définie sur un intervalle de $[a, b]$ est **en escalier** s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ et des nombres réels $c_1, \cdots, c_n$ tels que pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ on ait

$$\forall x \in]x_{i-1}, x_i[, \ \varphi(x) \ = \ c_i.$$

Autrement dit φ est une fonction constante sur chacun des sous-intervalles ouverts de la subdivision σ.

Remarque.

1. La valeur de φ aux points x_i de la subdivision n'est pas imposée. Cela n'a pas d'importance car l'aire ne changera pas.
2. Une fonction en escalier ne prend qu'un nombre fini de valeurs. **Par exemple:** $\varphi(x) = E(5x)$ est une fonction en escalier sur $[0, 1]$, où $E(x)$ désigne la partie entière du réel x. **Préciser les valeurs de cette fonction**.
3. Une fonction qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs **n'est pas nécessairement** une fonction en escalier. Par exemple, la fonction

$$\psi(x) = 1, \ \ si \ \ x \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \text{ et } \psi(x) = 0 \text{ sinon.}$$

4. Les fonctions constantes sont évidemment des fonctions en escalier.
5. **Exemples:** Parmi les fonctions suivantes, déterminer les fonctions en escalier en précisant leur valeurs.
   - **i)** Une fonction g définie par morceaux

$$\begin{cases} g(x) = 2x - 1, \ x \in]0, 1/2] \\ g(x) = -x + 3, \ x \in]1/2, 1] \end{cases} .$$

   - **ii)** Une fonction h définie par $h(x) = E(5x)$ pour tout $x \in [0, 2]$.
   - **iii)** Une fonction définie par $\psi(x) = E(1/x)$, pour tout $x \in]0, 1]$.
   - **iv)** La fonction composée $\psi \circ \psi$, où ψ est la fonction donnée ci-dessus.

Intégrale d'une fonction en escalier

Definition 3.

Soit φ une fonction en escalier définie sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ on ait

$$\forall x \in]x_{i1}, x_i[, \ \varphi(x) \ = \ c_i.$$

L'intégrale de φ sur $[a, b]$ est le réel $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx$ défini par

$$\int_a^b \varphi(x)dx \ = \ \sum_i c_i(x_i - x_{i-1}).$$

Remarque.

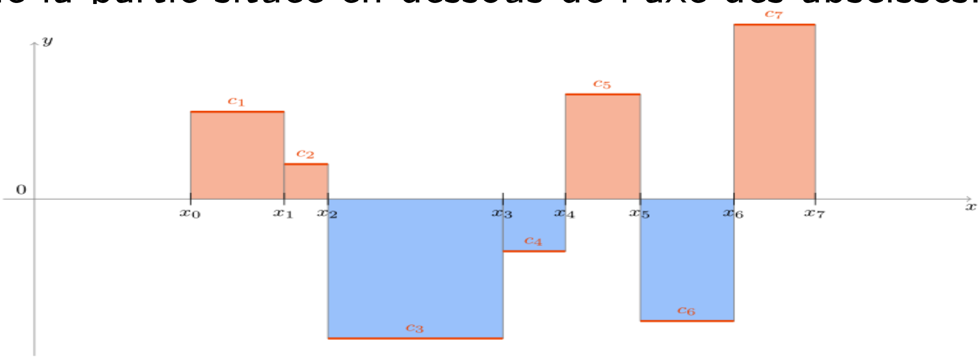
Le symbole $\int_a^b \varphi(x)dx$ est une notation. On peut aussi écrire $\int_a^b \varphi(t)dt$, $\int_a^b \varphi(\xi)d\xi$, etc.

Le nombre $\int_a^b \varphi(x)dx$ est indépendant de choix de la subdivision.

Interprétation d'une intégrale

L'intégrale d'une fonction en escalier est bien un nombre réel qui mesure l'aire algébrique (c-à-d avec signe) entre la courbe de φ et l'axe des abscisses.

L'intégrale d'une fonction en escalier est l'aire de la partie de la figure plane située au-dessus de l'axe des abscisses moins l'aire de la partie située en-dessous de l'axe des abscisses.



Propriétés de l'intégrale

Proposition 4.

Soit φ une fonctions en escalier définie sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $c \in]a, b[$, la fonction φ est en escalier sur $[a, c]$ et $[c, b]$, et on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad \textbf{\textit{(Relation de Chasles)}}$$

Proposition 5.

Soient φ et ψ des fonctions en escalier définies sur $[a, b]$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonctions $\lambda\varphi$ et $\varphi + \psi$ sont en escalier sur $[a, b]$, et on a :

$$\begin{aligned} \int_a^b (\varphi + \psi)(x)dx &= \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx; \\ \int_a^b (\lambda\varphi)(x)dx &= \lambda \int_a^b \varphi(x)dx. \end{aligned}$$

Proposition 6.

Soient φ et ψ des fonctions en escalier définies sur $[a, b]$.

Si $\varphi(x) \leq \psi(x)$, pour tout $x \in [a, b]$, alors

$$\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx.$$

La fonction $x \mapsto |\varphi(x)|$ est aussi en escalier et on a

$$\left|\int_a^b \varphi(x)dx\right| \leq \int_a^b |\varphi(x)|\, dx.$$

Travaux dirigés

Démonstrations des Propositions 4, 5 & 6

Travaux dirigés

Exercice 1. Montrer les assertions suivantes.

(a) Toute fonction en escalier est bornée.

(b) Si f est une fonction en escalier, alors $|f|$ l'est également.

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g sont des fonctions en escalier, alors λf et $f + g$ sont aussi en escalier. **Autrement dit**, l'ensemble des fonctions en escalier définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Travaux dirigés

Exercice 2. Montrer les assertions suivantes.

(a) Si f et g sont en escalier alors les fonctions $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont aussi en escalier.

(b) Si f est en escalier alors les fonctions $f_+ = \max(f, 0)$ et $f = \max(f, 0)$ sont aussi en escalier.

(c) Le produit de deux fonctions en escalier est une fonction en escalier.

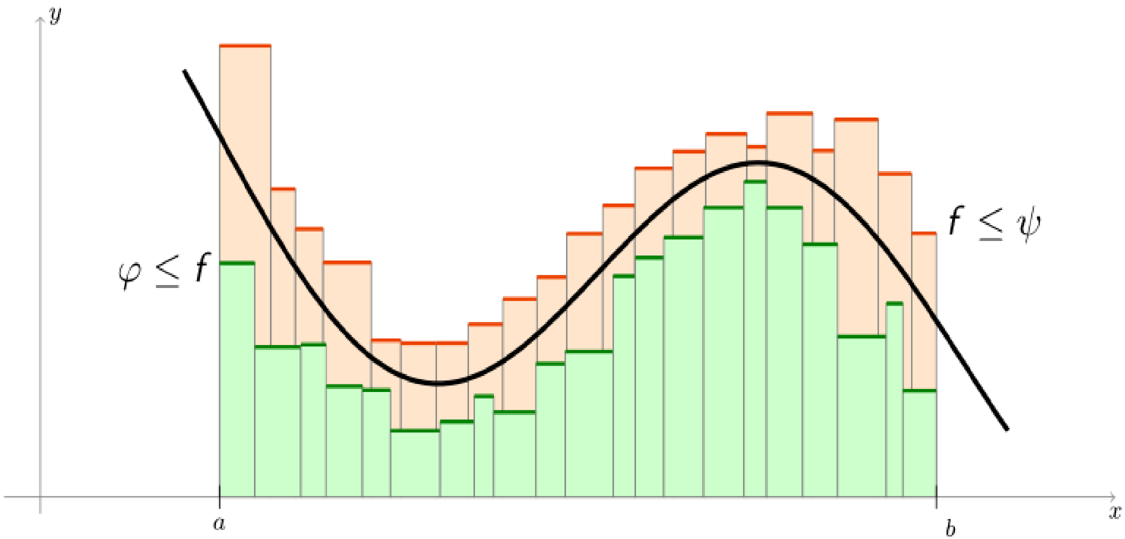
(d) La composée de deux fonctions en escalier n'est toujours pas une fonction en escalier.

Intégrale au sens de Riemann

Rappel: Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite bornée s'il existe un nombre $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M, \ \forall x \in [a, b]$.

Soient f une fonction bornée définie sur $[a, b]$ $(a < b)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{E}([a, b])$ l'espace des fonctions en escalier définies sur $[a, b]$. On définit deux parties Φ_- et Φ_+ de $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \Phi_- &= \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx \ : \ \varphi \in \mathcal{E}([a, b]) \ \text{et } \varphi \leq f \right\}, \\ \Phi_+ &= \left\{ \int_a^b \psi(x)dx \ : \ \psi \in \mathcal{E}([a, b]) \ \text{et } f \leq \psi \right\}. \end{aligned}$$


y
$\varphi \leq f$
$f \leq \psi$
a
b
x

Definition 7.

Une fonction f bornée sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite **intégrable (au sens de Riemann)** si $\sup(\Phi_-) = \inf(\Phi_+)$. Cette valeur commune est alors appelée l'intégrale de f sur $[a, b]$ et notée $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Remarques.

Les fonctions en escalier sont Riemann intégrables.

Les fonctions **continues/continues par morceaux** et les fonctions **monotones/monotones par morceaux** sont Riemann intégrables.

Cependant, il y a des fonctions qui ne sont pas Riemann intégrables. Par exemple, la fonction $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ n'est pas Riemann intégrable.

Remarques. (Propriétés de l'intégrale de Riemann)

Les propriétés (**linéarité, croissance, majoration et relation de Chasles**) que possèdent les intégrales des fonctions en escalier sont encore valable pour les intégrales de Riemann. Pour s'autoriser des bornes sans se préoccuper de l'ordre on définit: $\int_a^a f(x)dx = 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$ et $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx, \ \forall a < b.$
La relation de Chasles devient alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

Sommes de Riemann et sommes de Darboux

Étant donné une fonction bornée $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une subdivision $\sigma = (x_j)_{0\leq j\leq n}$ et une suite $c = (c_j)_{0\leq j\leq n-1}$ telle que $c_j \in [x_j, x_{j+1}]$, pour tout j. La somme

$$R_n(\sigma, c) = \sum_{j=1}^{n} f(c_{j-1})\,(x_j - x_{j-1})$$

est appelée **somme de Riemann** relative à σ et c.

Lorsque $f(c_{j-1}) = M_{j-1} = \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)$, pour tout j, on parle de somme de **somme de Darboux supérieure**.

Lorsque $f(c_{j-1}) = m_{j-1} = \inf_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)$, pour tout j, on parle de somme de **somme de Darboux inférieure**.

Theorem 8.

Si f est une fonction intégrable sur $[a, b]$ et $\sigma = (x_j)_{0 \leq j \leq n}$ une subdivision de pas δ telle que $c_j \in [x_j, x_{j+1}]$, $\forall j$, alors

$$\lim_{\delta \to 0} R_n(\sigma, c) = \int_a^b f(x)dx,$$

où $R_n(\sigma, c)$ est la somme de Riemann relative à σ et c.

Remarque. La réciproque est vraie si la somme de Riemann $R_n(\sigma, c)$ converge vers une même limite l, pour tout σ et c. On note $l = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Theorem 9.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. f est intégrable au sens de Riemann si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ et ψ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\, dx < \varepsilon$.

T.A.F: Démonstration

Travaux dirigés

Exercice 3. En utilisant la définition de l'integrale de Riemann, calculer les 'intégrales suivantes.

(a) $\displaystyle\int_0^a E(x)dx$, où $a > 0$ $E(x)$ désigne la partie entière du réel x.

(b) $\displaystyle\int_0^1 xdx$, $\displaystyle\int_1^3 x^2dx$ et $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}dx$.

Travaux dirigés

Exercice 4. Soient f et g deux fonctions Riemann intégrables sur $[a, b]$.

1) Proposer un exemple pour vérifier que:
$$\int_a^b f(x)g(x)dx \neq \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right).$$

2) Montrer que:
$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b f(x)^2dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b g(x)^2dx\right)^{1/2}.$$

Définition et Proposition 10.

Soient f une fonction Riemann intégrable sur un intervalle $[a, b]$ et $x_0 \in]a, b[$.

(i) *La fonction F définie sur $[a, b]$ par : $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est dite primitive de f basée (ou s'annulant) en a.*

(ii) *Si $l_+ = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ (resp. $l_- = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$), alors F est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0 et $F'_d(x_0) = l_+$ (resp. $F'_d(x_0) = l_-$).*

(iii) *Si f est continue en x_0, alors F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$*

Démonstration de la Proposition 10

- Il suffit vérifier la première partie de **(i)**.
- Vérifier que pour tout $x \in]x_0, b]$, $|F(x) - F(x_0) - l_+(x - x_0)| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t) - l_+| \, dt$, puis utiliser la définition de la limite $l_+ = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

Definition 11.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que F est une primitive de f sur I si $F'(x) = f(x), \forall x \in I$.

Proposition 12.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Alors pour toute primitive F de f on a :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

T.A.F: Preuve

Remarques.

- Toute fonction Riemann intégrable sur $[a, b]$ admet une primitive continue sur $[a, b]$.
- Toute fonction continue sur $[a, b]$ est Riemann intégrable sur $[a, b]$.

Theorem 13 (Intégration par parties).

Soient f et g deux fonctions continues de primitives respectives F et G, alors

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

Theorem 14 (Changement de variable).

Soient $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $\phi : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* C^1, *avec* $\phi([a, b]) \subseteq [a, b]$, *alors*

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$