Université Chouaib Doukkali
Faculté Polydisciplinaire Sidi Bennour
Durée: 2h

Licence Professionnelle I.M.A
Semestre 2 - Printemps 2022
Analyse 2

Contrôle Continu

Nom et Prénom* : ....

REMARQUES IMPORTANTES

- **Les téléphones portables doivent être éteints.**
- **Aucun document n'est autorisé.**
- **Seules les calculatrices non programmables sont autorisées.**
- **Les exercices sont indépendants. Ils ne sont pas classés par ordre de difficulté.**

Questions de cours: (6pts)

Cocher la bonne réponse:

1. Une subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ d'un intervalle $[a, b]$ est dite régulière si,

   ☐ son pas $\delta(n)$ est inférieur à 1.
   ☐ son pas $\delta(n)$ converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
   ☐ son pas $\delta(n)$ est égal à $\dfrac{b-a}{n}$.

2. La fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = E(3x)$, où $E(x)$ est la partie entière du réel x, est une fonction en escalier.

   ☐ Oui ☐ Non

3. La fonction g définie sur $]0, 1]$ par $g(x) = E\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est une fonction en escalier.

   ☐ Oui ☐ Non

4. Toute fonction qui prend un nombre fini de valeurs est une fonction en escalier.

   ☐ Oui ☐ Non

5. Toute fonction constante est une fonction en escalier.

   ☐ Oui ☐ Non

6. Toute fonction en escalier est bornée.

   ☐ Oui ☐ Non

7. Il existe une fonction non intégrable au sens de Riemann qui prend un nombre fini de valeurs.

   ☐ Oui ☐ Non

8. Toute fonction monotone bornée est Riemann intégrable.

   ☐ Oui ☐ Non

---

* ***Feuille à rendre avec la copie.***

Exercice 1: (2pts)

On considère l'intégrale suivante $I = \int_0^{\pi/2} \sin^4(x)\cos^2(x)dx$.

1. Linéariser l'expression suivante: $\sin^4(x)\cos^2(x)$.

   Hint: Utiliser les formules suivantes: Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\sin(x)\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$, $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

2. En déduire la valeur de I.

Exercice 2: (6pts)

Calculer les intégrales suivantes:

$$A = \int_{-1}^{1} (e^x - x)dx; \quad B = \int_0^1 (x^3 - 3x + 1)dx$$

$$C = \int_0^2 x^3 e^x dx; \quad D = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x\sin^8(x)dx$$

$$E = \int_1^e \ln(x)dx; \quad F = \int_2^4 \frac{4x^2+x+4}{(x-1)(x+2)^2}dx$$

Hint: Chercher les valeurs des réels a, b et c tels que

$$\frac{4x^2+x+4}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}.$$

Exercice 3: (6pts)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[-1,1]$ telle que $f(0) > 0$. On pose

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt, & \text{si } x \neq 0, \\ g(0) = f(0). \end{cases}$$

1. La fonction g est-elle bien définie ? (Justifier votre réponse).
2. Montrer que g est continue en $x_0 = 0$.
3. La fonction g est-elle dérivable sur $[-1,1]$? (Justifier votre réponse).
4. Vérifier que pour tout $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$: $xg'(x) + g(x) = f(x)$.

   Application: La fonction g est dite solution de l'équation différentielle $xy' + y = f(x)$.

5. Déterminer une solution $y_0(x)$ de l'équation différentielle $(\mathbf{E})$: $xy' + y = \cos(x)$.
6. Soit $y(x) = y_0(x) + \frac{C}{x}$, où C est une constante. Vérifier que y est une solution de l'équation différentielle $(\mathbf{E})$.