Université Chouaib Doukkali
Faculté Polydisciplinaire Sidi Bennour
Durée: 2h

Licence Professionnelle I.M.A
Semestre 2 - Printemps 2022
Analyse 2

Examen : Session Normale

*Nom et Prénom** : ....

REMARQUES IMPORTANTES

- **Les téléphones portables doivent être éteints.**
- **Aucun document n'est autorisé.**
- **Seules les calculatrices non programmables sont autorisées.**
- **Les exercices sont indépendants. Ils ne sont pas classés par ordre de difficulté.**

Questions de cours: (7pts)

Cocher la bonne réponse:

1. Le nombre de valeurs prises par la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = E(5x)$, où $E(x)$ désigne la partie entière du réel x, est

   ☐ 6 ☐ 5 ☐ infini

2. Toute fonction continue par morceaux et bornée est Riemann intégrable.

   ☐ Oui ☐ Non

3. La fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x}$ est intégrable sur l'intervalle:

   ☐ $]0, 1]$ ☐ $]-1, 1[\setminus\{0\}$ ☐ $[2, 3]$

4. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$, $a, b \in \mathbb{R}$ d'une fonction $f \geq 0$

   ☐ est toujours positive
   ☐ mesure l'aire algébrique entre les axes d'équations: $x = a$, $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe de f.

5. La somme et le produit de deux fonctions en escalier sont des fonctions en escalier.

   ☐ Oui ☐ Non

6. La limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_0^{\pi} \sin(t + x)e^{-xt}dt$ est égale à:

   ☐ 0 ☐ 2 ☐ π

7. La limite $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \int_0^{1} \sin(t + x)e^{-xt^2}dt$

   ☐ est égale à $+\infty$ ☐ est égale à 0 ☐ n'existe pas.

---

* ***Feuille à rendre avec la copie.***

Exercice 1. (8pts)

1. Calculer les intégrales suivantes:

$$A = \int_{-1}^{1} x^2(e^x - e^{-x})dx; \quad B = \int_0^1 (x^7 - 3x^2 + 1)dx$$

$$C = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}; \quad D = \int_0^{\ln(2)} \frac{dx}{e^{2x} + e^x}$$

$$E = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n(x)}{\sin^n(x) + \cos^n(x)} dx,\ n \in \mathbb{N}^*; \quad F = \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^5(x)dx$$

2. Chercher les valeurs des réels a et b telles que

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx}{x^2 - x + 1}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

3. Calculer les intégrales suivantes: $I = \displaystyle\int_0^e \frac{dx}{x^2 - x + 1}$ et $J = \displaystyle\int_0^e \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 1} dx$

Exercice 2. (5pts) (Une loi de probabilité sans mémoire)

En théorie des probabilités, une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **densité de probabilité** si:

a) $f(x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$;

b) et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx := \lim_{a \to +\infty} \int_0^a f(x)dx = 1.$

Soient $\lambda > 0$ et $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Vérifier que la fonction f_λ est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire continue sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $X \geq 0$ et $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f_\lambda(x)dx$, $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$. On dit que X suit **la loi exponentielle** de paramètre λ.

2. Calculer $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 3)$ et $\mathbb{P}(X > 7)$.

On rappelle que si A et B sont deux événements avec $\mathbb{P}(B) > 0$, alors $\mathbb{P}(A|B)$ la probabilité de A sachant B est égale à $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$; $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$, où A^c désigne l'événement contraire de A. Par exemple, l'événement contraire de $(X > t)$ est l'événement $(0 \leq X \leq t)$.

3. Montrer que $\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s)$, pour tout $t, s \in \mathbb{R}_+$. Toute variable qui vérifie une égalité de cette forme est dite **sans mémoire**.