

Examen: Session de Rattrapage

REMARQUES IMPORTANTES

- Les téléphones portables doivent être éteints.
 - Aucun document n'est autorisé.
 - Seules les calculatrices non programmables sont autorisées.
 - Les exercices sont indépendants. Ils ne sont pas classés par ordre de difficulté.
-

Exercice 1: (10pts)

1. Calculer les intégrales suivantes:

$$A = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 3}; \quad B = \int_{-1}^1 \frac{x}{x^8 + 3x^2 + 7} dx; \quad C = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx$$
$$D = \int_0^1 (2x - 1)e^{-x} dx; \quad E = \int_0^{\pi} \cos^3(x) dx; \quad F = \int_0^{\pi/2} e^{-x} \sin(x) dx.$$

2. Chercher les valeurs des réels a , b et c telles que

$$\frac{1}{x^3 - 7x + 6} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x - 2} + \frac{c}{x + 3}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 1; 2\}.$$

3. Calculer l'intégrale suivante: $I = \int_{-2}^0 \frac{dx}{x^3 - 7x + 6}$.

Exercice 2: (4pts)

Soient a et b deux réels tels que $0 < a \leq b$. On pose $h(x) = \int_a^x \frac{dt}{t} - \frac{x - a}{\sqrt{ax}}$.

1. Préciser la valeur de $h(a)$, puis vérifier que h est continue sur $[a, +\infty[$.
2. Montrer que $h'(x) \leq 0$, pour tout $x \in]a, +\infty[$.
3. En déduire que $\int_a^b \frac{dt}{t} \leq \frac{b - a}{\sqrt{ab}}$.

Exercice 3: (6pts)

1. Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes:

$$(E_1) : y'' - 4y = 0 \quad (E_2) : y'' - 3y' + 2y = 0$$

2. Préciser la valeur du réel a pour que $y_0(t) = ate^t$ soit une solution particulière de l'équation suivante: $(E_3) : y'' - 3y' + 2y = e^t$.

3. En déduire l'ensemble des solutions générales de cette équation différentielle.