Université Chouaib Doukkali
Faculté Polydisciplinaire de Sidi Bennour
Pr. Mohamed El Omari

Licence Professionnelle I.M.A
Semestre 2 - Printemps 2021
Analyse 2

TRAVAUX DIRIGÉS

Contents

1 Subdivisions et fonctions en escalier

Rappel: Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(-\infty < a < b < +\infty)$.

(a) On appelle une **subdivision** d'ordre n de $[a, b]$ une suite finie, strictement croissante, de nombres $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$. Autrement dit $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

Le réel $\delta(\sigma) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$ est **le pas** de la subdivision σ.

La subdivision σ dite **régulière** (ou à pas constant) si

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = \delta(\sigma), \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n.$$

(b) Une fonction φ définie sur un intervalle de $[a, b]$ est **en escalier** s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ et des nombres réels $c_1, \cdots, c_n$ tels que pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ on ait

$$\forall x \in \,]x_{i-1}, x_i[\,, \; \varphi(x) = c_i.$$

Autrement dit φ est une fonction constante sur chacun des sous-intervalles ouverts de la subdivision σ.

(c) Soit φ une fonction en escalier définie sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ on ait

$$\forall x \in]x_{i?1}, x_i[, \; \varphi(x) = c_i.$$

L'intégrale de φ sur $[a, b]$ est le réel $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx$ défini par

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_i c_i(x_i - x_{i-1}).$$

1.1 *Exercice 1.*

Montrer les assertions suivantes.

1. Toute fonction en escalier est bornée.
2. Si f est une fonction en escalier, alors $|f|$ l'est également.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g sont des fonctions en escalier, alors λf et $f + g$ sont aussi en escalier. **Autrement dit**, l'ensemble des fonctions en escalier définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. (On peut supposer que les deux fonctions sont associées à la même subdivision)

1.2 *Exercice 2.*

Montrer les assertions suivantes.

1. Si f et g sont en escalier alors les fonctions $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont aussi en escalier.
2. (On peut supposer que les deux fonctions sont associées à la même subdivision)
3. Si f est en escalier alors les fonctions $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \max(-f, 0)$ sont aussi en escalier.
4. Le produit de deux fonctions en escalier est une fonction en escalier.
5. La composée de deux fonctions en escalier n'est toujours pas une fonction en escalier.

1.3 *Exercice 3.*

On considère la fonction φ définie sur $[0,1]$ par $\varphi(x) = E(5x)$, où $E(x)$ désigne la partie entière du réel x.

1. Préciser les valeurs de cette fonction φ.
2. La fonction φ est elle en escalier ? (justifier votre réponse).
3. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)dx$.

1.4 *Exercice 4.*

On considère la fonction ψ définie sur $]0,1]$ par $\psi(x) = E\left(\dfrac{1}{x}\right)$, où $E(x)$ désigne la partie entière du réel x.

1. Calculer les images des réels 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5} par la fonction ψ.
2. La fonction ψ est elle en bornée ? (Justifier votre réponse).
3. La fonction ψ est elle en escalier ? (Justifier votre réponse).
4. Préciser les valeurs de la fonction $\psi \circ \psi$, et en déduire qu'elle est en escalier.

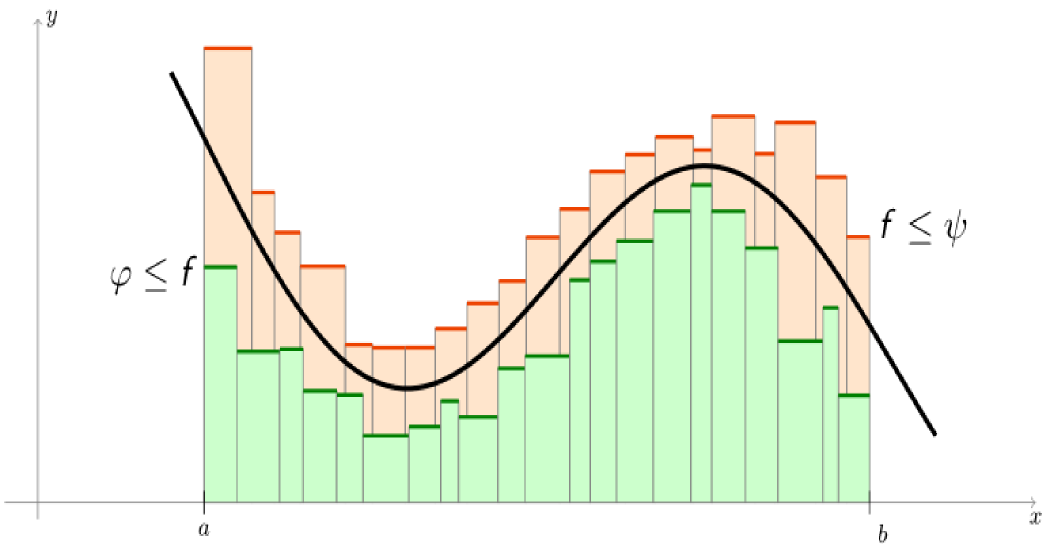
2 Sommes de Darboux et sommes de Riemann

Rappel:

- Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **bornée** s'il existe un nombre $M > 0$ tel que
$$|f(x)| \leq M, \ \forall x \in [a,b].$$
- **Intégrabilité au sens de Riemann:**

  Soient f une fonction bornée définie sur $[a,b]$ $(a < b)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{E}([a,b])$ l'espace des fonctions en escalier définies sur $[a,b]$. On définit deux parties Φ_- et Φ_+ de $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned}
\Phi_- &= \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx \ : \ \varphi \in \mathcal{E}([a,b]) \text{ et } \varphi \leq f \right\}, \\
\Phi_+ &= \left\{ \int_a^b \psi(x)dx \ : \ \psi \in \mathcal{E}([a,b]) \text{ et } f \leq \psi \right\}.
\end{aligned}$$



Une fonction f bornée sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite **intégrable (au sens de Riemann)** si $\sup(\Phi_-) = \inf(\Phi_+)$. Cette valeur commune est alors appelée l'intégrale de f sur $[a,b]$ et notée $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

- **Sommes de Riemann et sommes de Darboux:**

  Étant donné une fonction **bornée** $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une subdivision $\sigma = (x_j)_{0\le j\le n}$ et une suite $c = (c_j)_{0\le j\le n-1}$ telle que $c_j \in [x_j, x_{j+1}]$, pour tout j. La somme

$$R_n(\sigma, c) = \sum_{j=1}^{n} f(c_{j-1})\,(x_j - x_{j-1})$$

  est appelée **somme de Riemann** relative à σ et c.

  - Lorsque $f(c_j) = M_j = \sup\limits_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f(x)$, pour tout j, on parle de somme de **somme de Darboux supérieure**.
  - Lorsque $f(c_j) = m_j = \inf\limits_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f(x)$, pour tout j, on parle de somme de **somme de Darboux inférieure**.

- Si f est une fonction intégrable sur $[a,b]$ et $\sigma = (x_j)_{0\le j\le n}$ une subdivision de pas δ telle que $c_j \in [x_j, x_{j+1}]$, $\forall j$, alors

$$\lim_{\delta\to 0} R_n(\sigma, c) = \int_a^b f(x)dx,$$

  où $R_n(\sigma, c)$ est la somme de Riemann relative à σ et c.

2.1 *Exercice 5.*

Soient f une fonction bornée sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\sigma = (x_j)_{0\le j\le n}$ une subdivision de $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Le pas de cette subdivision est défini par $\delta(n) = \sup\limits_{1\le j\le n} |x_j - x_{j-1}|$. Soient $D^+(n)$ et $D^-(n)$ les sommes de Darboux (supérieure et inférieure) de f relative à σ.

$$\begin{aligned} D^+(n) &= \sum_{j=1}^{n} M_j\,(x_j - x_{j-1}), \quad M_j = \sup_{x_j\le x\le x_{j-1}} f(x), \\ D^-(n) &= \sum_{j=1}^{n} m_j\,(x_j - x_{j-1}), \quad m_j = \inf_{x_j\le x\le x_{j-1}} f(x), \end{aligned}$$

On suppose que $\delta(n) \longrightarrow 0$ lorsque $n \to +\infty$ (cette condition est vérifie dans le cas d'une subdivision régulière: $\delta(n) = 1/n$).

1. **Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(D^+(n) - D^-(n)\right) = 0$, alors f est Riemann intégrable.**
2. **Montrer que si f est croissante, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(D^+(n) - D^-(n)\right) = 0$.**

2.2 *Exercice 6.*

Soit $(U_n)_{n\ge 1}$ une suite définie par $U_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\frac{j}{n}}$

1. Montrer que U_n est une somme de Riemann attachée à une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ à préciser.
2. La fonction f est elle intégrable au sens de Riemann ? (Justifier votre réponse).
3. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

2.3 *Exercice 7.*

Soit $(V_n)_{n\geq 1}$ une suite définie par

$$V_n \;=\; \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$$

1. Montrer que (V_n) est une suite convergente.
2. Ecrire V_n sous la forme d'une somme de Riemann. Puis, en déduire sa valeur.

3 Calcul des primitives et intégration par parties

Rappel:

- Soit f une fonction définie sur le segment $[a,b]$. La fonction Φ est une **primitive** de f sur $[a,b]$ si Φ est dérivable sur $[a,b]$ telle que $\Phi' = f$.
- Une fonction f est dite **de classe $\mathcal{C}^1$** si elle dérivable et sa dérivée est continue. On écrit $f\in\mathcal{C}^1$.
- **Formule fondamentale du calcul intégral:**

  Soient f une fonction continue sur $[a,b]$ et F une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

  a) La primitive de f qui s'annule en a est la fonction Φ définie par

  $$\Phi(x) \;=\; \int_a^x f(t)dt$$

  b) Si F est une autre primitive de f, alors $F(x)-F(a) \;=\; \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, $\forall x\in[a,b]$.

3.1 *Exercice 8.*

Déterminer les primitives suivantes:

a) $\displaystyle\int x^2dx$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{(1+x)dx}{(x+2)(x+3)}dx$ d) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^{-x}}dx$

3.2 *Exercice 9.*

On pose

$$A=\int_0^{\pi/2}\cos^2(x)dx \quad \text{et} \quad B=\int_0^{\pi/2}\sin^2(x)dx$$

1. Calculer $A+B$ et $A-B$.
2. En déduire les valeurs de A et B.

3.3 *Exercice 10.*

Calculer les intégrales suivantes:

a) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{-x}dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^3\sin^2(x)dx$ c) $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)dx$

d) $\displaystyle I_n=\int_0^1 x^ne^{-x}dx$ e) $\displaystyle J_n=\int_0^{\pi/2} x^n\sin^2(x)dx$ f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}dx$

3.4 *Exercice 11.*

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur un intervalle ouvert I (i.e., f admet une dérivée d'ordre 3 qui est continue).

1. Vérifier que pour tout $x, a \in I$ on a:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \frac{1}{2}\int_a^x f^{(3)}(t)(x-t)^2 dt.$$

   (Formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 2)

2. **Application:**

   Vérifier que $e^x \geq \frac{x^2}{2} + x + 1, \forall x \in \mathbb{R}_+$.

4 Changement de variables

4.1 *Exercice 12.*

Calculer les intégrales suivantes:

$$E = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1-\sin(t)} \text{ et } F = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$$

$$G = \int_0^{\pi/2} \cos^5(t)\sin^4(t)dt \text{ et } H = \int_0^1 \sqrt{\frac{2x+1}{x+3}}dt$$

4.2 *Exercice 13.*

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[-a, a]$, $a > 0$. Montrer que:

- Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt.$
- Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 0.$

4.3 *Exercice 14.*

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On pose

$$F(x) = \int_{2x-1}^{x^2+1} f(t)dt$$

Calculer $F'(x)$

4.4 *Exercice 15.*

On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a : $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
2. En déduire la valeur de I_n.

5 Calcul des intégrales

5.1 *Exercice Corrigé 16.*

Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$). L'intégrale de f sur l'intervalle $]a,+\infty[$ est définie par

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt,$$

dès que cette limite existe. On pose $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$, pour tout $\alpha > 0$. On admet que cette intégrale est bien définie.

1. Calculer $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$ et $\Gamma(3)$
2. Montrer que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $\Gamma(n+1) = n!$. On rappelle que $n! = n(n-1)\times\cdots\times 2\times 1$

Correction:

1. **Calculons $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$ et $\Gamma(3)$.**

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1-e^{-x}\right) = 1,\\ \Gamma(2) &= \int_0^{+\infty} te^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty}\left(\left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}dt\right) = \lim_{x\to+\infty} -xe^{-x} + \Gamma(1) = \Gamma(1).\end{aligned}$$

   Dans le calcul de $\Gamma(2)$ on a utilisé la méthode d'intégration par parties. De même on trouve $\Gamma(3) = 2$

2. **Montrons que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$**

   On pose $I_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x t^n e^{-t}dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de la fonction gamma Γ ci-dessus on a $\Gamma(n+1) = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} I_{n+1}(x)$. Par integration par parties on obtient

$$\begin{aligned}I_{n+1}(x) &= \left[t^n(-e^{-t})\right]_0^x + n\int_0^x t^{n-1}e^{-t}dt,\\ &= -x^n e^{-x} + nI_n(x).\end{aligned}$$

   On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$, donc par passage à la limite ($x \to +\infty$), on trouve $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

3. **On raisonne par récurrence sur n pour vérifier que $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.**

5.2 *Exercice 17.*

Calculer les intégrales suivantes:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-3x+2}{x^3+1}dx$ **b)** $\displaystyle\int_2^3 \frac{xdx}{x^2-6x+10}$ **c)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

d) $\displaystyle I\int_{-1}^1 \frac{dx}{e^{2x}+e^x}$ **e)** $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$ f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3\sin(x)+4\cos(x)}$

g) $\displaystyle I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n(x)}{\sin^n(x)+\cos^n(x)}dx$ et $\displaystyle J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n(x)}{\sin^n(x)+\cos^n(x)}dx$

Hint: Calculer $I_n + J_n$, puis utiliser le changement de variable $y = \pi/2 - x$.

5.3 *Exercice Corrigé 18.*

Calculer les limites suivantes:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n\sin(nx)dx$ **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}dx$

Hint: Utiliser les propriétés de majoration et de croissance de l'intégrale.

Correction:

1. On sait que $|\sin(nx)|\leq 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, alors

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 x^n\sin(nx)dx\right| &\leq \int_0^1 x^n\left|\sin(nx)\right|dx\leq\int_0^1 x^n dx,\\ &\leq \frac{1}{n+1}\longrightarrow 0,\quad \text{lorsque } n\to+\infty.\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n\sin(nx)dx$.

2. En utilisant l'inégalité suivante: $a\leq\sqrt{a^2+b^2}\leq a+b$, $\forall a,b\geq 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 xdx &\leq \int_0^1\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}dx\leq\int_0^1\left(x+\frac{1}{n}\right)dx,\\ \Longleftrightarrow &\quad \frac{1}{2}\leq\int_0^1\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}dx\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Par passage à la limite ($n\to+\infty$) on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}dx=\frac{1}{2}$.

5.4 *Exercice 19.*

On pose

$$\mathbf{B}(\alpha,\beta)\;=\;\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du,\quad \text{où } \alpha,\beta>0.$$

On admet que cette intégrale est bien définie pour tout $\alpha,\beta>0$.

1. Calculer $\mathbf{B}(2,3)$, $\mathbf{B}(1/2,1/2)$, $\mathbf{B}(\alpha,1)$, $\mathbf{B}(n+1,\beta)$ et $\mathbf{B}(n,m)$ avec $m,n\in\mathbb{N}^*$ et $\alpha,\beta>0$ (Pour le calcul de $\mathbf{B}(1/2,1/2)$, utiliser le changement de variable $u=v^2$).
2. Vérifier que $\mathbf{B}(\alpha,\beta)$ pour tout $\alpha,\beta>0$ (Utiliser un changement de variable convenable).
3. Montrer que pour tout $\alpha,\beta>0$, on a $\mathbf{B}(\alpha+1,\beta)\;=\;\frac{\alpha}{\beta}\mathbf{B}(\alpha,\beta+1)$.
4. Montrer que pour tout $\alpha,\beta>0$, on a $\mathbf{B}(\alpha,\beta)\;=\;\int_0^{\pi/2}\sin^{2\alpha-1}(\theta)\cos^{2\beta-1}(\theta)d\theta$.

5.5 *Exercice Corrigé 20.*

On considère l'intégrale suivante:

$$U_n\;=\;\int_0^1\frac{dx}{(x+1)^n},\quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

1. Sans calculer l'intégrale, prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$.
2. Calculer U_1, U_2, U_3 et U_n.

Correction:

1. Observons tout d'abord que la suite (U_n) est décroissante et minorée par 0. D'où elle converge. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq \quad U_{n+1} &= \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^{n+1}} = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^n}\left(\frac{1}{x+1}\right) dx, \\ \leq \quad & \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^n} = U_n \leq 1. \end{aligned}$$

Soient $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n \in [0,1]$ et $\varepsilon \in]0,1[$. On veut montrer que $\gamma = 0$.
On raisonne par l'absurde en supposant que $\gamma > 0$**.** Par relation de Chasles on trouve

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq \quad U_n &= \int_0^\varepsilon \frac{dx}{(x+1)^n} + \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{(x+1)^n}, \\ \leq \quad & \varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^n}. \end{aligned}$$

En outre $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(1+\varepsilon)^n} = 0$. D'où par passage à la limite $(n \to +\infty)$ on obtient $0 \leq \gamma \leq \varepsilon$, $\forall \varepsilon \in]0,1[$. Le réel ε étant arbitraire on prend $\varepsilon = \gamma/2 > 0$ pour aboutir à une contradiction $\gamma \leq \gamma/2$, et par conséquent l'hypothèse $\gamma > 0$ est fausse ou bien $\gamma = 0$.

2. $U_1 = \ln(2)$, $U_2 = 1/2$ et $U_3 = 3/8$. En général, $U_n = \dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}(n-1)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5.6 *Exercice 21.* (Intégrale de Gauss)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) \quad = \quad \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt, \quad \text{et} \quad g(x) \quad = \quad \int_0^x e^{-t^2} dt$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée f'.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée g'.
3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par: $h(x) \ = \ f(x) + g^2(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$.
4. Vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \ = \ 0$
5. En déduire la valeur de $I \ = \ \displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2} dt$.

5.7 *Exercice Corrigé 22.*

On considère la fonction $F \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $F(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(t)e^{-t} dt$,

1. La fonction F est-elle bien définie?
2. Préciser $F(x)$. Puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

Correction:

1. La fonction $t \mapsto \cos(t)e^{-t}$ est continue et bornée sur tout intervalle $[0,x] \subset \mathbb{R}_+$ (ou $[x,0] \subset \mathbb{R}_-$), donc elle Riemann intégrable. c'est-à-dire F est bien définie.

2. Dans le but de préciser $F(x)$, on procède par intégration par parties. On trouve

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \cos(t)e^{-t}dt = \int_0^x \cos(t)\left(-e^{-t}\right)' dt = \left[-\cos(t)e^{-t}\right]_0^x - \int_0^x \sin(t)e^{-t}dt, \\ &= 1-\cos(x)e^{-x} - \int_0^x \sin(t)\left(-e^{-t}\right)' dt, \\ &= 1-\cos(x)e^{-x} - \left(-\sin(x)e^{-x} + \int_0^x \cos(t)e^{-t}dt\right), \\ &= 1-(\sin(x)-\cos(x))\, e^{-x} - F(x). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[1+(\sin(x)-\cos(x))\, e^{-x}\right] \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1/2.$$

5.8 *Exercice 23.*

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes:

(E_1) : $y'' - 4y = 0$ $\qquad$ (E_2) : $y'' - 3y' + 2y = 0$

(E_3) : $y'' - 3y' + 2y = e^t$ (Chercher une solution particulière de la forme $y_0(t) = ate^t$ avec $a \in \mathbb{R}$).

(E_4) : $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{ch}(t)$, où ch est la fonction cosinus hyperbolique: $\mathrm{ch}(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$.

(E_5) : $y'' + y' = te^t$ $\qquad$ (E_6) : $y'' - 2y = t^3 - 2t + 1$

5.9 *Examen de la session normale: 31-05-2022*

Questions de cours: (7pts)

Cocher la bonne réponse:

1. Le nombre de valeurs prises par la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = E(5x)$, où $E(x)$ désigne la partie entière du réel x, est

   ☐ 6 ☐ 5 ☐ infini

2. Toute fonction continue par morceaux et bornée est Riemann intégrable.

   ☐ Oui ☐ Non

3. La fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x}$ est intégrable sur l'intervalle:

   ☐ $]0, 1]$ ☐ $]-1, 1[\setminus\{0\}$ ☐ $[2, 3]$

4. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$, $a, b \in \mathbb{R}$ d'une fonction $f \geq 0$

   ☐ est toujours positive

   ☐ mesure l'aire algébrique entre les axes d'équations: $x = a$, $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe de f.

5. La somme et le produit de deux fonctions en escalier sont des fonctions en escalier.

   ☐ Oui ☐ Non

6. La limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_0^\pi \sin(t+x)e^{-xt}dt$ est égale à:

   ☐ 0 ☐ 2 ☐ π

7. La limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^1 \sin(t+x)e^{-xt^2}dt$

☐ est égale à $+\infty$ ☐ est égale à 0 ☐ n'existe pas.

Exercice 1. (8pts)

1. Calculer les intégrales suivantes:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} x^2(e^x - e^{-x})dx; \quad B = \int_0^1 (x^7 - 3x^2 + 1)dx \\ C &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}; \quad D = \int_0^{\ln(2)} \frac{dx}{e^{2x}+e^x} \\ E &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n(x)}{\sin^n(x)+\cos^n(x)}dx,\ n \in \mathbb{N}^*; \quad F = \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^5(x)dx \end{aligned}$$

2. Chercher les valeurs des réels a et b telles que

$$\frac{x^2-3x+2}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx}{x^2-x+1}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}.$$

3. Calculer les intégrales suivantes: $I = \displaystyle\int_0^e \frac{dx}{x^2-x+1}$ et $J = \displaystyle\int_0^e \frac{x^2-3x+2}{x^3+1}dx$

Exercice 2. (5pts) (Une loi de probabilité sans mémoire)

En théorie des probabilités, une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **densité de probabilité** si:

a) $f(x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$;

b) et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx := \lim_{a\to+\infty}\int_0^a f(x)dx = 1.$

Soient $\lambda > 0$ et $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Vérifier que la fonction f_λ est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire continue sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $X \geq 0$ et $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f_\lambda(x)dx$, $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$. On dit que X suit **la loi exponentielle** de paramètre λ.

2. Calculer $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 3)$ et $\mathbb{P}(X > 7)$.

On rappelle que si A et B sont deux événements avec $\mathbb{P}(B) > 0$, alors $\mathbb{P}(A|B)$ la probabilité de A sachant B est égale à $\dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$; $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$, où A^c désigne l'événement contraire de A. Par exemple, l'événement contraire de $(X > t)$ est l'événement $(0 \leq X \leq t)$.

3. Montrer que $\mathbb{P}(X > t+s | X > t) = \mathbb{P}(X > s)$, pour tout $t, s \in \mathbb{R}_+$. Toute variable qui vérifie une égalité de cette forme est dite **sans mémoire**.

Correction:

Questions de cours: (7pts)

Cocher la bonne réponse:

1. Le nombre de valeurs prises par la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = E(5x)$, où $E(x)$ désigne la partie entière du réel x, est égale à 6.

   Pour préciser les valeurs de la fonction f, on distingue les cas suivants:

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{si } x \in [0, 1/5[, \\ f(x) = 1, & \text{si } x \in [1/5, 2/5[, \\ f(x) = 2, & \text{si } x \in [2/5, 3/5[, \\ f(x) = 3, & \text{si } x \in [3/5, 4/5[, \\ f(x) = 4, & \text{si } x \in [4/5, 1[, \\ f(1) = 5. \end{cases}$$

   Donc $f(x) \in \{0, 1, \cdots, 5\}$.

2. Oui (Voir le cours).

3. La fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x}$ est intégrable sur l'intervalle $[2,3]$.

   En général, une fonction g est intégrable sur un intervalle I si $\displaystyle\int_I g(x)dx$ existe et fini. Une condition suffisante pour avoir l'intégrabilité de g est qu'elle soit continue par morceaux et bornée sur I. La fonction $g\ :\ \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas bornée sur les deux premiers intervalles proposés: $]0,1]$ et $]-1,1[\backslash\{-1\}$. De plus, on peut montrer que $\displaystyle\int_{]0,1]} g(x)dx = +\infty$. En effet,

$$\begin{aligned} \int_{]0,1]} g(x)dx &= \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} [\ln(x)]_\varepsilon^1, \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} -\ln(\varepsilon) = +\infty. \end{aligned}$$

4. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt,\ a, b \in \mathbb{R}$ d'une fonction $f \geq 0$ mesure l'aire algébrique entre les axes d'équations: $x = a$, $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe de f.

   La première proposition est fausse. Il suffit de prendre $a = 2$ et $b = 0$ pour avoir une quantité négative.

5. Oui (Voir le cours).

6. La limite $\lim_{x\to 0}\int_0^{\pi} \sin(t+x)e^{-xt}dt$ est égale à 0.

1$^{\text{ère}}$ Méthode:

On peut démontrer le résultat ci-dessus comme suit. Observons tout d'abord que la fonction $(x,t)\mapsto f(x,t)=\sin(t+x)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$, parce qu'elle est composée et produit des fonctions continues. D'après le théorème de continuité (voir le cours, Théorème 10), on déduit que $x\mapsto F(x)=\int_0^{\pi}\sin(t+x)e^{-xt}dt$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier elle est continue en $x_0=0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\int_0^{\pi}\sin(t+x)e^{-xt}dt &= \lim_{x\to 0}F(x)=F(0),\\ &= \int_0^{\pi}\sin(t)dt=[-\cos(x)]_0^{\pi}=2\end{aligned}$$

2$^{\text{ème}}$ Méthode:

On peut exprimer $F(x)$ de façon explicite. Pour ce faire, on rappelle que: $\sin(\theta)=\mathcal{I}m(e^{i\theta})$, $\forall\theta\in\mathbb{R}$ et pour tout fonction complexe h intégrable sur $I\subset\mathbb{R}$ on a $\int_I \mathcal{I}m(h(t))dt=\mathcal{I}m\left(\int_I h(t)dt\right)$.

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_0^{\pi}\sin(t+x)e^{-xt}dt=\int_0^{\pi}\mathcal{I}m\left(e^{i(t+x)}\right)e^{-xt}dt,\\ &= \mathcal{I}m\left(\int_0^{\pi}e^{i(t+x)}e^{-xt}dt\right)=\mathcal{I}m\left(e^{ix}\int_0^{\pi}e^{(i-x)t}dt\right),\\ &= \mathcal{I}m\left(e^{ix}\left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\right]_{t=0}^{t=\pi}\right)=\mathcal{I}m\left(\frac{e^{ix}}{i-x}\left(e^{(i-x)\pi}-1\right)\right),\\ &= \mathcal{I}m\left(\frac{e^{ix}}{i-x}\left(-e^{-x\pi}-1\right)\right)\quad(\text{parce que } e^{i\pi}=-1),\\ &= \mathcal{I}m\left(\frac{e^{ix}(x+i)\left(e^{-x\pi}+1\right)}{(x+i)(x-i)}\right),\\ &= \mathcal{I}m\left(\frac{(e^{-x\pi}+1)}{x^2+1}e^{ix}(x+i)\right)=\mathcal{I}m\left(\frac{(e^{-x\pi}+1)}{x^2+1}(\cos(x)+i\sin(x))(x+i)\right),\\ &= \mathcal{I}m\left(\frac{(e^{-x\pi}+1)}{x^2+1}(x\cos(x)+i\cos(x)+ix\sin(x)-\sin(x))\right),\\ &= \frac{e^{-x\pi}+1}{x^2+1}(\cos(x)+x\sin(x)).\end{aligned}$$

7. La limite $\lim_{x\to+\infty}\int_0^{1}\sin(t+x)e^{-xt^2}dt$ est égale à 0.

Soit $x>1$. On a :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1\sin(t+x)e^{-xt^2}dt\right| &\le \int_0^1\left|\sin(t+x)e^{-xt^2}\right|dt,\\ &\le \int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}\left|\sin(t+x)e^{-xt^2}\right|dt+\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}^1|\sin(t+x)|\,e^{-xt^2}dt,\\ &\le \frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}^1 e^{-xt^2}dt.\end{aligned}$$

L'inégalité ci-dessus on a majoré $\left|\sin(t+x)e^{-xt^2}\right|$ et $|\sin(t+x)|$ par 1. On peut encore majorer

e^{-xt^2} par $e^{-x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2}$ dans la dernière intégrale. On trouve

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 \sin(t+x)e^{-xt^2}dt\right| &\leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}^1 e^{-x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2}dt, \\
&\leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + e^{-\sqrt[3]{x}}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \longrightarrow 0, \quad \text{lorsque } x \to +\infty.
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\int_0^1 \sin(t+x)e^{-xt^2}dt\right| = 0$, ou bien $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^1 \sin(t+x)e^{-xt^2}dt = 0$.

Exercice 1. (8pts)

1. Calcul des intégrales:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^1 x^2(e^x - e^{-x})dx = 0 \text{ , (car la fonction } x \mapsto x^2(e^x-e^{-x}) \text{ est impaire sur } [-1,1]). \\
B &= \int_0^1 (x^7 - 3x^2 + 1)dx = \left[\frac{x^8}{8} - x^3 + x\right]_0^1 = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}dx, \\
&= \int_0^1 \sqrt{x+1}-\sqrt{x}dx = \int_0^1 (x+1)^{1/2}dx - \int_0^1 x^{1/2}dx, \\
&= \frac{2}{3}\left(\left[(x+1)^{3/2}\right]_0^1 - \left[x^{3/2}\right]_0^1\right) = \frac{2}{3}\left(2^{3/2}-2\right) = \frac{5^{5/2}-4}{3}.
\end{aligned}$$

Par changement de variable $y = e^x$ $(dy = e^x dx)$ on obtient

$$\begin{aligned}
D &= \int_0^{\ln(2)} \frac{dx}{e^{2x}+e^x} = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^x dx}{e^x((e^x)^2+e^x)}, \\
&= \int_1^2 \frac{dy}{y(y^2+y)} = \int_1^2 \left(-\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y+1}\right)dy \quad \text{(par décomposition en éléments simples)}, \\
&= \left[-\ln(y) - \frac{1}{y} + \ln(y+1)\right]_1^2 = \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans le but de calculer l'intégrale $E = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n(x)}{\sin^n(x)+\cos^n(x)}dx$, on introduit l'intégrale suivante

$$H = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n(x)}{\sin^n(x)+\cos^n(x)}dx.$$

Par changement de variable $y = \pi/2 - x$ on peut vérifier aisément que $E = H$. De plus $E + H = \int_0^{\pi/2} 1dx = \pi/2$. D'où $E = H = \pi/4$.

En utilisant le changement de variable $y = \sin(x)$ $(dy = \cos(x)dx)$ on trouve

$$\begin{aligned}
F &= \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos^5(x)dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)(1-\sin^2(x))^2\cos(x)dx, \\
&= \int_0^1 y^2(1-y^2)^2dy = \int_0^1 \left(y^6 - 2y^4 + y^2\right)dy = \left[\frac{y^7}{7} - \frac{y^5}{5} + \frac{y^3}{3}\right]_0^1, \\
&= \frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{105}.
\end{aligned}$$

2. Cherchons les valeurs des réels a et b telles que

$$Q(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx}{x^2-x+1}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}. \quad (\star)$$

On a

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1}(x+1)Q(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x^2-3x+2)}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x+1} = 6/3 = 2, \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to -1}(x+1)Q(x) = \lim\limits_{x\to -1}(x+1)\left(\dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx}{x^2-x+1}\right) = \lim\limits_{x\to -1}\left(a + \dfrac{bx(x+1)}{x^2-x+1}\right) = a. \end{cases}$$

D'autre part

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} xQ(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x(x^2-3x+2)}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{x^3} = 1, \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to +\infty} xQ(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx}{x^2-x+1}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{ax}{x+1} + \dfrac{bx^2}{x^2-x+1} = a+b. \end{cases}$$

Il en résulte que $a = 2$ et $b = -1$.

3. Calculons les intégrales suivantes: $I = \displaystyle\int_0^e \frac{dx}{x^2-x+1}$ et $J = \displaystyle\int_0^e \frac{x^2-3x+2}{x^3+1}dx$

Un calcul simple avec changement de variable $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}(x - 1/2)$ donne

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2e-1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right).$$

En utilisant la décomposition $(\star)$ on obtient

$$\begin{aligned} J &= \int_0^e \frac{x^2-3x+2}{x^3+1}dx = \int_0^e \left(\frac{2}{x+1} - \frac{x}{x^2-x+1}\right)dx = 2\left[\ln(x+1)\right]_0^e - \frac{1}{2}\int_0^e \frac{(2x-1)+1}{x^2-x+1}dx, \\ &= 2\ln(e+1) - \frac{1}{2}\int_0^e \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}dx - \frac{1}{2}\int_0^e \frac{1}{x^2-x+1}dx, \\ &= 2\ln(e+1) - \frac{1}{2}\left[\ln(x^2-x+1)\right]_0^e - \frac{I}{2}, \\ &= \ln\left(\frac{e^2+2e+1}{\sqrt{e^2-e+1}}\right) - \frac{I}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 2. (5pts) (Une loi de probabilité sans mémoire)

Rappel I.
En théorie des probabilités, une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **densité de probabilité** si:

a) $f(x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$;

b) et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx := \lim_{a\to+\infty}\int_0^a f(x)dx = 1.$

Soient $\lambda > 0$ et $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Vérifions que la fonction f_λ est une densité de probabilité.

Puisque $\lambda > 0$ et $e^{-\lambda x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$. On a alors $f_\lambda(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. De plus,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)dx &= \lim_{y\to+\infty}\int_0^y \lambda e^{-\lambda x}dx = \lim_{y\to+\infty}\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^y, \\ &= \lim_{y\to+\infty} 1-e^{-\lambda y} = 1 \quad (\text{car } \lim_{y\to+\infty} e^{-\lambda y} = 0).\end{aligned}$$

Ce qui signifie que f_λ est densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire continue sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $X \geq 0$ et $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f_\lambda(x)dx$, $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$. On dit que X suit **la loi exponentielle** de paramètre λ.

2. Calculons $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 3)$ et $\mathbb{P}(X > 7)$.

* $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(2 \leq X \leq 2) = \displaystyle\int_2^2 f_\lambda(x)dx = 0$;
* $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 3) = \displaystyle\int_0^3 f_\lambda(x)dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^3 = 1 - e^{-3\lambda}$;
* Observons que $(0 \leq X \leq 7)$ est l'événement contraire de $(X > 7)$. Donc

$$\mathbb{P}(X > 7) = 1 - \mathbb{P}(0 \leq X \leq 7) = 1 - \left(1 - e^{-7\lambda}\right) = e^{-7\lambda}.$$

Rappel II.

- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$, où A^c désigne l'événement contraire de A. Par exemple, l'événement contraire de $(X > t)$ est l'événement $(0 \leq X \leq t)$;
- Si A et B sont deux événements avec $\mathbb{P}(B) > 0$, alors $\mathbb{P}(A|B)$ la probabilité de A sachant B est égale à $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

3. Montrons que $\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s)$, pour tout $t, s \in \mathbb{R}_+$.

* Soit $t, s \in \mathbb{R}_+$. Il clair que $\mathbb{P}(X > s) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda s}\right) = e^{-\lambda s}$. De même on a $\mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t}$ et $\mathbb{P}(X > t + s) = e^{-\lambda(t+s)}$. Par définition de la probabilité conditionnelle donnée ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X > t + s | X > t\right) &= \frac{\mathbb{P}\left((X > t+s) \cap (X > t)\right)}{\mathbb{P}\left(X > t\right)} = \frac{\mathbb{P}\left(X > t+s\right)}{\mathbb{P}\left(X > t\right)}, \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(X > s)\end{aligned}$$