Université Chouaib Doukkali
Faculté Polydisciplinaire Sidi Bennour
Durée: 2h

Licence Professionnelle M.A.O
Semestre 2 - Printemps 2022
Probabilités

Examen: Session Normale

*Nom et Prénom** : ....

REMARQUES IMPORTANTES

- **Les téléphones portables doivent être éteints.**
- **Aucun document n'est autorisé.**
- **Seules les calculatrices non programmables sont autorisées.**
- **Les exercices sont indépendants. Ils ne sont pas classés par ordre de difficulté.**

Questions de cours: (7pts)

Cocher la bonne réponse:

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le nombre suivant $S = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$ est égal à:

   ☐ 0 ☐ 2^n ☐ 3^n

2. Deux événements A et B sont indépendants si $A \cap B = \emptyset$

   ☐ Oui ☐ Non

3. Deux événements A et B sont incompatibles si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

   ☐ Oui ☐ Non

4. Une variable aléatoire est dite discrète si elle prend un nombre fini de valeurs.

   ☐ Oui ☐ Non

5. Soit Y une variable aléatoire ayant pour ensemble de valeurs $Y(\Omega) = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$. La suite $(k/5)_{1\leq k\leq 4}$ peut définir une loi de probabilité de Y.

   ☐ Oui ☐ Non

6. Soit Z une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p. La probabilité de $\mathbb{P}(Z = k)$ est égale à:

   ☐ $p(1-p)^{n-k}$ ☐ $p^k(1-p)^{n-k}$ ☐ $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

7. Soit U une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0.5$. La probabilité $\mathbb{P}(U \leq 2)$ est égale à:

   ☐ $\sqrt{e}$ ☐ $\frac{e^{-1/2}}{8}$ ☐ $\frac{13}{8\sqrt{e}}$

---

* ***Feuille à rendre avec la copie.***

Exercice 1: (6pts)

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel que $\Omega = \{(a,a);\ (a,b);\ (b,a);\ (b,b)\}$. On suppose que les événements élémentaires sont équiprobables.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants: $\mathbf{A} = \{(a,b);\ (a,a)\}$, $\mathbf{B} = \{(b,a);\ (a,a)\}$ et $\mathbf{C} = \{(a,b);\ (b,a)\}$.
2. Les événements $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ sont-ils deux à deux indépendants? (Justifier votre réponse).
3. Les événements $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B} \cap \mathbf{C}$ sont-ils indépendants?(Justifier votre réponse).
4. Les événements $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B} \cup \mathbf{C}$ sont-ils indépendants? (Justifier votre réponse).
5. Montrer que (en général) si $\mathbf{A}$ est indépendant de $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{B} \cap C$, alors $\mathbf{A}$ est indépendant de $\mathbf{B} \cup \mathbf{C}$.

Exercice 2: (7pts)

Soient X une variable aléatoire continue de densité de probabilité $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, et F sa fonction de répartition.

1. Exprimer $F(t)$ en fonction de f.
2. On suppose que $\mathbb{P}(X > t) > 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $P(X > s) = 1 - F(s)$ et $\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \dfrac{1 - F(t+s)}{1 - F(t)}$, $\forall t, s \in \mathbb{R}_+$.
3. On suppose que X est **sans mémoire**, c'est-à-dire,

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = P(X > s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}_+.$$

   a) Montrer que $1 - F(t+s) = (1 - F(s))\,(1 - F(t))$, $\forall t, s \in \mathbb{R}_+$.
   b) En dérivant l'égalité figurant à la question a), par rapport à t puis par rapport à s, vérifier que $f(t+s) = -f(s)f(t))$, $\forall t, s \in \mathbb{R}_+$.
   c) On suppose que $\gamma = f(0) > 0$. En prenant $s = 0$ dans l'égalité figurant à la question b), vérifier que $f(t) = \gamma e^{-\gamma t}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

4. On rappelle que f est densité de probabilité sur $[0, +\infty[$ si $f \geq 0$ et

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx := \lim_{a \to +\infty} \int_0^a f(x)dx = 1.$$

   Calculer l'espérance et la variance de X.