

Examen: Session de Rattrapage

REMARQUES IMPORTANTES

- Les téléphones portables doivent être éteints.
 - Aucun document n'est autorisé.
 - Seules les calculatrices non programmables sont autorisées.
 - Les exercices sont indépendants. Ils ne sont pas classés par ordre de difficulté.
-

Exercice 1: (8pts)

Dans une population, 5% des personnes sont contaminées par un virus. On suppose disposer d'un test de dépistage ayant les propriétés suivantes :

- il est positif dans 99% de cas de personnes contaminées
- et positif dans 2% de cas de personnes non contaminées.

1. Quelle est la probabilité que ce test soit positif quand il est utilisé sur un sujet quelconque?
2. Quelle est la probabilité d'être effectivement contaminé sachant que le test est positif?
3. Calculer la probabilité qu'un individu soit contaminé sachant que le test est négatif.
4. Quelle est la probabilité qu'il y a une erreur dans le test de dépistage? (c'est-à-dire le test est négatif sur un individu contaminé ou le test est positif sur un individu non contaminé).

Exercice 2: (6pts)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = \alpha x^3(1-x)^2, & \text{si } x \in [0, 1], \\ f(x) = 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que $f(x) = \alpha(x^5 - 2x^4 + x^3)$, pour tout $x \in [0, 1]$.
2. Préciser la valeur de α pour que f soit une densité de probabilité.
3. Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité f .

Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 3: (6pts)

On suppose que le temps T , en heures, nécessaire pour réparer une machine est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,5$.

1. Préciser la densité de probabilité et la fonction de répartition de T .
2. Déterminer la probabilité pour que le temps de réparation dépasse 2 heures.
3. Sachant que la réparation a déjà dépassé 9 heures, quelle est la probabilité qu'elle prenne au moins 10 heures ?