Probabilités

Mohamed El Omari
Enseignant Chercheur,
Spécialité: Statistique et Probabilités

Ancien Inspecteur Pédagogique

Faculté Polydisciplinaire de Sidi Bennour.

March 24, 2023

Outline

Qu'est-ce que l'analyse combinatoire ?

Qu'est-ce que l'analyse combinatoire ?

L'analyse combinatoire est l'étude des différentes manières de **"ranger"** des objets. Ces objets peuvent être des nombres, des individus, des lettres, etc. Nous examinerons ici les cas qui se présentent le plus fréquemment.

1. **Arrangements** (avec ou sans répétition).
2. **Permutations** (avec ou sans répétition).
3. **Combinaisons** (sans répétition).

Principe de multiplication

Si une expérience aléatoire est constituée de $\boldsymbol{k}$ **étapes** et s'il y a $\boldsymbol{n_j}$ **résultats possibles** lors de la j ème étape, pour $j = 1, \cdots, k$, alors il y a $\boldsymbol{n_1} \times \cdots \times \boldsymbol{n_k}$ résultats élémentaires dans l'espace échantillon. C'est le principe de multiplication.

Arrangements et permutations

Il faut distinguer le cas où l'on range des objets en tenant compte de l'ordre du cas où l'ordre n'importe pas. Dans le cas où l'on tient compte de l'ordre, on parle **d'arrangements**.

- **Le nombre d'arrangements possibles** de k objets parmi n est donné par:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A_n^k} &= \frac{n!}{(n-k)!} \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1). \end{aligned}$$

- Si on accepte la répétition des objets choisis, on parle **d'arrangements avec répétition** (ou avec remise). Dans ce cas on applique la formule suivante: $\boldsymbol{n^k}$

- **Cas particulier:** si $k = n$, on parle alors de permutation de n objets. C'est un rangement, ou un classement ordonné de n objets.
- Le nombre de permutations possibles de n objets est égal à $\boldsymbol{n!} \; = \; n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1.$
- Le nombre de permutations que l'on peut obtenir si certains des objets sont identiques est plus faible que si tous les objets étaient distincts.
- Lorsque nous avons n objets comprenant respectivement $n_1, n_2 \cdots, n_r$ termes identiques, le nombre de permutations est égal à:

$$\frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{n_1!n_2!\cdots n_r!}}.$$

Combinaisons

- **Problème.** Dix enfants s'échangent des poignées de mains, chacun à chacun une seule fois. Combien y a-t-il de poignées de mains ?
- Si l'ordre dans lequel les objets ont été choisis ne nous intéresse pas, nous pouvons parler de **combinaisons**.
- C'est le cas si nous désirons (par exemple) tirer d'une urne cinq boules au hasard, qui en contient quinze numérotées.
- La formule générale du nombre de combinaisons de k objets parmi n est égale à:

$$\boldsymbol{C_n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}$$

Travaux dirigés-TD1

Vérifier les assertions suivantes:

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n$: $C_n^k \;=\; C_n^{n-k}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n$: $C_n^k + C_n^{k+1} \;=\; C_{n+1}^{k+1}$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n$: $kC_n^k \;=\; nC_{n-1}^{k-1}$.

(d) **Formule du binôme de Newton:**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : (a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

(e) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \;=\; 0.$

1. **TAF.**

   Un cadenas à numéros a trois roues; chacune porte les numéros 0 à 9. **Combien de "nombres "secrets y a-t-il ?**

   

2. D'un jeu de 40 cartes, on tire deux cartes simultanément (sans remise). **De combien de manières différentes est-ce possible ?**

3. **Combien de nombres différents de 7 chiffres existe-t-il**
   a) Si il n'y a aucune restriction?
   b) Si les nombres doivent être divisibles par 5?
   c) Si les nombres doivent être divisibles par 2?
   d) Si les répétitions de chiffres sont exclues?

4. Ali va disposer 12 livres sur un rayon de sa bibliothèque. 5 d'entre eux sont des livres de mathématiques, 4 de chimie, 2 d'histoire et un de langue.

   Ali aimerait ranger ses livres de façon que tous les livres traitant du même sujet restent groupés. **Combien y a-t-il de dispositions possibles ?**

5. Tirage au sort des groupes de la phase finale de la coupe du monde de football. Une urne contient 32 boules contenant chacune le nom d'un pays qualifié dont 8 boules sont des pays têtes de série. Calculer, dans chacun des cas suivants, le nombre de tirages possibles d'un groupe de 4 pays :

- **a)** tirage simultané (un seul tirage : on ne tient pas compte de l'ordre et sans remise) des 4 boules.
- **b)** tirage simultané d'une boule parmi les têtes de série et de 3 boules parmi les non têtes de série.
- **c)** tirages successifs (on tient compte de l'ordre) sans remise des 4 boules.
- **d)** tirages successifs avec remise des 4 boules.

6. **Le responsable du personnel d'une usine doit constituer, pour assurer une permanence, une équipe composée de 3 surveillants et de 2 ouvriers d'entretien. Il dispose de 4 surveillants et de 5 ouvriers d'entretien.**
   a) De combien de façons différentes peut-il constituer cette équipe ?
   b) Sachant qu'il doit éviter de placer dans la même équipe le surveillant S_1 et l'ouvrier O_1. Entre combien d'équipes différemment constituées peut-il choisir ?

Calcul des probabilités

1. Expérience aléatoire, univers et événement

- Une **expérience** est dite **aléatoire** si on ne peut pas prédire a priori son résultat. On note ω un résultat possible de cette expérience aléatoire. L'ensemble de tous les résultats possibles est appelé **univers** et noté Ω.
- On appelle événement tout sous-ensemble de l'univers Ω.
- L'ensemble des événements est noté $\mathcal{F}$.

Exemples.

- On lance une pièce de monnaie. Normalement, on ne peut pas prédire si on obtiendra “Pile”ou “Face”.

  On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6. On ne peut pas prédire quel nombre entre 1 et 6 sortira.
- On tire 6 boules dans une sphère contenant 49 boules numérotées de 1 à 49. On ne peut pas prédire quels sont les six numéros que l'on obtiendra.

Les différents résultats que l'on peut obtenir après une expérience aléatoire s'appellent **les issues** de cette expérience aléatoire ou aussi **les résultats possibles** ou **les éventualités** de cette expérience aléatoire.

2. Terminologie des événements

- $\emptyset$ est appelé **événement impossible**.
- Ω est appelé **événement certain**.
- Tout singleton $\{\omega\}$, où $\omega \in \Omega$, est appelé **événement élémentaire**.
- Nous appelons **événements incompatibles** ou **disjoints** deux événements A et B tels que $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire qu'il est impossible que A et B se réalisent simultanément.

- **L'événement contraire** de l'événement A est noté: A^c. C'est l'événement qui se réalise lorsque A n'est pas réalisé.
- **L'événement "A ou B"** est noté: $A \cup B$. C'est l'événement qui se réalise lorsque l'un des événements A et B est réalisé.
- **L'événement "A et B"** est noté: $A \cap B$. C'est l'événement qui se réalise lorsque les deux événements A et B sont réalisés.
- On dit que l'événement A **implique l'événement** B si et seulement si $A \subset B$.

Dorénavant, On suppose que l'ensemble des événements est noté $\mathcal{F}$ vérifie les conditions suivantes:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$.
2. Si $A \in \mathcal{F}$, alors son complémentaire $A^c \in \mathcal{F}$ (où A^c est le complémentaire de A dans Ω).
3. Toute réunion dénombrable d'événements de $\mathcal{F}$ est aussi un événement de $\mathcal{F}$.

Dans ce cas le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est appelé **espace probabilisable**.

3. Notion de probabilité: Approche axiomatique

On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ une application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{F}$ dans $[0, 1]$ vérifiant les deux propriétés suivantes:

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1.$
2. Pour toute suite $(A_i)_{i\in I}$ dénombrable d'événements de $\mathcal{F}$ deux à deux incompatibles, on a

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé**.

En théorie des probabilités, le terme **modéliser** désigne l'opération qui consiste à associer à une expérience aléatoire le triplet $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\mathcal{F}}, \mathbb{P})$.

Probabilité sur un univers fini:
On considère une expérience aléatoire modélisée par $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$. Pour tous événements A et B de $\mathcal{F}$, on a

- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
- Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- Si A et B sont incompatibles, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
- En général, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

- **Équiprobabilité et probabilité uniforme**
  Nous disons qu'il y a équiprobabilité lorsque les probabilités de tous les événements élémentaires sont égales. Dans ce cas, P est la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

- **Conséquence:** S'il y a équiprobabilité, pour tout événement A, nous avons alors

$$\mathbb{P}(A) \quad = \quad \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

4. Probabilité conditionnelle et indépendance

- Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et deux événements A et B, A étant de probabilité non nulle. On s'intéresse aux événements sachant A réalisé, c'est-à-dire à **la probabilité conditionnelle sachant** A, notée $\mathbb{P}_A(\cdot)$ et définie par:

$$\mathbb{P}_A(B) \;=\; \frac{\mathbb{P}\,(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}, \;\; \forall B \in \mathcal{F}.$$

- C'est une application de $\mathcal{F}$ dans $[0, 1]$ définissant une probabilité sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. **À vérifier.**

Événements indépendants

- L'événement B est indépendant de l'événement A si la probabilité de réalisation de l'événement B n'est pas modifiée par une information concernant la réalisation de l'événement A, c'est-à-dire si : $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.
- Les événements A et B sont indépendants et vérifient la propriété : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. **À vérifier.**

Système complet d'événements:

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire.

- On appelle système complet d'événements toute famille $(A_i)_{i\in I}$ telle que $A_i \subset \Omega$, $\forall i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ et $\cup_{i\in I} A_i = \Omega$.
- On dit que le système complet d'événements $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de Ω si de plus, chaque A_i est non vide.

Remarque.

- Pour tout événement A, le couple (A, A^c) est un système complet d'événements.
- La famille $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$ est une partition de Ω.

Probabilités totales:

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient $n \geq 2$ et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements tels que $\mathbb{P}(A_i) > 0, \ \forall i$. Pour tout événement B, on a

$$\mathbb{P}(B) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B).$$

Exercice 1. On lance deux dés supposés discernables, et on considère les événements suivants:

A : sur le premier dé, on obtient un nombre impair;

B : sur le deuxième dé, on obtient un nombre impair;

C : la somme des points apparaissant sur les deux dés est impaire.

- Les événements A, B et C sont-ils indépendants deux à deux indépendants ?
- Comparer $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ et $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.

Théorème. (formule de Bayes)
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient $(A_1 \cdots, A_n)$ un système complet d'événements et B un événement tels que $\mathbb{P}(A_i) \neq 0, \forall i$ et $\mathbb{P}(B)$. Alors

$$\mathbb{P}_B(A_k) \quad = \quad \frac{\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}.$$

Exercice 2.

Dans une population donnée, un individu peut être atteint d'une certaine maladie (événement M) ou pas. On fait un test de dépistage sur un individu et le test peut être positif (événement T) ou pas. On suppose que

- 10% de la population est constituée de personnes malades (ou encore $\mathbb{P}(M) = 0,1$),
- 93% des personnes malades ont un test positif (ou encore $\mathbb{P}_M(T) = 0,93$),
- et 97% des personnes non malades ont un test négatif (ou encore $\mathbb{P}_{M^c}(T^c) = 0,97$).

On veut maintenant la probabilité d'être malade sachant que l'on a un test positif ou encore on veut $P_T(M)$.