Université Chouaib Doukkali
Faculté Polydisciplinaire Sidi Bennour
Durée: 2h

Licence Professionnelle M.A.O
Semestre 3 - Automne 2021
Échantillonnage et Estimation

Examen: Session Normale

Nom et Prénom*[*] : .... N° d'examen : . ...

REMARQUES IMPORTANTES

- **Les téléphones portables doivent être éteints.**
- **Aucun document n'est autorisé.**
- **Seules les calculatrices non programmables sont autorisées.**
- **Les exercices sont indépendants. Ils ne sont pas classés par ordre de difficulté.**

Questions de cours: (7pts)

Cocher la (les) bonne(s) réponse(s):

1. **L'échantillonnage est l'ensemble des opérations qui permettent de sélectionner de façon organisée les éléments de l'échantillon.**

   ☐ Oui ☐ Non

2. **Soit** $(X_1, \cdots, X_n)$ **échantillon aléatoire d'une population. Alors**

   ☐ $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_n)$ ☐ $\mathbb{V}ar(X_1) \neq \mathbb{V}ar(X_n)$

3. **Soit** T **un estimateur d'un paramètre** θ **inconnu, tel que** $\mathbb{E}(T) = \theta$**.**
   Cet estimateur est-il sans biais ?

   ☐ Oui ☐ Non

4. **Soient** T_1 **et** T_2 **deux estimateurs d'un paramètre** $\theta > 0$ **inconnu, tels que**

   $$\mathbb{E}(T_1) = \theta^2 - e^{-n\theta} \quad , \quad \mathbb{E}(T_2) = \theta - e^{-n\theta^2},$$

   où n **désigne la taille de l'échantillon.**

   ☐ T_1 est sans biais. ☐ T_1 est asymptotiquement sans biais.
   ☐ T_2 est asymptotiquement sans biais.

5. **Soient** T_1 **et** T_2 **deux estimateurs sans biais d'un paramètre** θ**, tels que** $\mathbb{V}ar(T_2) = 2\mathbb{V}ar(T_1)$**.**

   ☐ T_2 est plus efficace que T_1 . ☐ T_1 est plus efficace que T_2 .

[*] ***Feuille à rendre avec la copie.***

6. **Soit S_X^2 la variance empirique définie par**

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n},$$

où n et $\overline{X}$ désignent respectivement la taille et la moyenne de l'échantillon.

   - ☐ S_X^2 est un estimateur sans biais.
   - ☐ S_X^2 est un estimateur de la variance de la population.
   - ☐ S_X^2 est un estimateur de la moyenne de la population.

7. **Pour estimer une proportion inconnue p d'une population, on utilise**

   - ☐ La moyenne de l'échantillon $\overline{X}$.
   - ☐ La proportion de l'échantillon.
   - ☐ La médiane de l'échantillon.

8. **La droite d'ajustement de Mayer est complètement déterminée par les points extrêmes.**

   ☐ Oui ☐ Non

9. **Une prévision de la valeur y_{t+1} d'une série chronologique par la méthode des moyennes mobiles pondérées d'ordre 3 peut être définie par:**

$$\widehat{y}_{t+1} = \frac{4y_t + 3y_{t-1} + y_{t-2}}{6}$$

   ☐ Oui ☐ Non

Exercice 1. (3pts)

Avant les élections, le candidat A commande un sondage effectué sur 250 personnes. 136 personnes interrogées déclarent avoir l'intention de voter pour le candidat A.

1. Préciser le paramètre à estimer et son estimation ponctuelle. L'estimateur utilisé est-il sans biais ?
2. Déterminer l'intervalle de confiance du paramètre en question, au niveau de confiance de 95%. Le candidat A peut-il espérer être élu ?
3. Le candidat A commande un second sondage effectué sur 1000 personnes pour lequel 542 personnes déclarent avoir l'intention de voter pour lui. Le candidat A peut-il espérer être élu ?

   Hint: Le seuil $\alpha = 0.05$ et $z_{1-\alpha/2} = 1.96$.

Exercice 2. (9pts)

Le tableau ci-contre donne le produit national brut (PNB) par habitant X et le taux de mortalité infantile Y pour quelques pays étudiés de l'Europe.

1. Préciser les caractères étudiés et leur nature.
2. Représenter graphiquement la série d'observations de la variable couple (X, Y), en précisant la droite D des points extrêmes.
   a) Déterminer l'équation de la droite D.
   b) En déduire une prévision $\widehat{y}$ de mortalité infantile pour Macédoine ayant un PNB égal à 990\$.
3. Calculer les moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$ des séries d'observations de X et Y.
4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y, et interpréter le résultat.
5. a) Déterminer l'équation de la droite Δ de régression linéaire de Y en fonction de X.
   a) En déduire une nouvelle prévision $\widetilde{y}$ de mortalité infantile pour Macédoine.
6. Calculer le coefficient de détermination R^2 pour chacun des modèles proposés, et interpréter le résultat.

	Mortalité infantile	**PNB par habitant**
	1996	1996
	/1000	10^3 \$ US
Albanie	20.4	0.82
Autriche	4.8	28.11
Belgique	5.8	26.44
Biélorussie	12	2.07
Bulgarie	15.6	1.19
Croatie	8	3.8
Danemark	5.8	32.1
Espagne	4.7	14.35
Finlande	3.5	23.24
France	9.1	26.27
Grèce	8.1	11.46
Hongrie	10	4.34
Irlande	5.5	17.11
Islande	5.5	26.58
Italie	5.8	19.88
Luxembourg	4.9	45.36

Source : Images économiques du monde

7. On propose un autre modèle de régression non linéaire $\mathcal{P}$ ayant pour équation $y = \alpha x^{\beta}$.
   a) Sachant que $M_1\,(2.07; 12)\,,\ M_2\,(19.88; 5.8) \in \mathcal{P}$, déterminer les réels α et β.
   b) En déduire une nouvelle prévision $\widetilde{y\ '}$ de mortalité infantile pour Macédoine.
   c) Comparer les trois modèles proposés en termes d'erreur quadratique moyenne (**EQM**).

$$EQM = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\widehat{y}_i - y_i)^2}{n},$$

   où y_i et $\widehat{y}_i$ désignent les données réelles et les prévisions associées.
   c) Laquelle des prévisions calculées $\widehat{y}$, $\widetilde{y}$ et $\widetilde{y\ '}$, parait la plus vraisemblable ?